Activités de recherche

J. Unterberger – Institut Elie Cartan de Nancy (IECN)
Page web: *http://www.iecn.u-nancy.fr/˜unterber*

1 Rayonnement scientifique

Collaborations scientifiques

Collaborations suivies avec Malte Henkel (Laboratoire de Physique des Matériaux, Nancy), Claude Roger (Département de mathématiques, Université Lyon 1), Samy Tindel (IECN, Nancy), Andreas Neuenkirch (département de mathématiques, Frankfurt), Albrecht Böttcher (département de mathématiques, Chemnitz), Vincent Rivasseau (laboratoire de physique théorique, Orsay), e Jacques Magnen (laboratoire de physique théorique, Ecole Polytechnique) et Fabien Vignes-Tourneret (CNRS, Université Lyon I).

Groupes de travail et rencontres régulières

- 2000–2005: co-organisation d'un *groupe de travail physique/mathématiques* à l'IECN autour de sujets divers (*théorie quantique des champs*, *systèmes intégrables*, *théorie conforme des champs* et *équation de Löwner stochastique*, fondements probabilistes de la physique statistique hors-équilibre). Des archives détaillées se trouvent sur ma page web (lien: groupe de travail phys/math).
- 2001-2004: participation annuelle aux *Rencontres mathématiques de Glanon* organisées par l'université de Bourgogne, autour de la *physique mathématique* et de la *géométrie de Poisson.*
- 2007-2008: participation au groupe de travail *Aspects fractals* du laboratoire de probabilités (LPMA) de Paris VI.
- 2008-2009 : co-organisation du groupe de travail *Probabilités discrètes* autour de systèmes de particules en interaction, en collaboration avec le Laboratoire de Physique des Matériaux (Nancy).

GDR et Projets ANR

- 2001-2004: membre du GDR *Structures géométriques et méthodes algébrico-topologiques* (ex-Séminaire sud-rhodanien de géométrie).
- 2006-2009: membre de l'ANR *Géométrie différentielle stochastique et autosimilarité* (coordinateur: Fabrice Baudoin, Université P. Sabatier de Toulouse) dont l'objectif est l'étude des processus stochastiques en lien avec la géométrie différentielle.
- 2009- : membre de l'ANR *Explorations des chemins rugueux* (coordinateur: Massimiliano Gubinelli, université Paris Dauphine). Co-organisateur de la première conférence tenue les 10-11 juin 2010 à l'Institut Henri Poincaré, intitulée: "Rough paths in interaction".

- 2010- : membre du GDR *Renormalisation: aspects algébriques, analytiques et géométriques* (coordinateurs: Sylvie Paycha, Dirk Kreimer, Frédéric Patras).

Mini-cours

- septembre 2011: mini-cours sur les chemins rugueux (rough paths) donné à l'Université de Rouen (équipe de probabilités).
- novembre 2011: mini-cours sur les chemins rugueux donné à l'Université de Heidelberg, Allemagne (laboratoire de physique théorique).

Séjours et invitations à l'étranger

- Invitation à la *Conference on quantum probability and infinite-dimensional analysis*, Levico Terme, Trento (Italie, 2005).
- Ecole d'été de physique statistique au Luxembourg, *Ageing and the glass transition* (automne 2005).
- Invitation en mars et juin 2006 au Newton Institute de Cambridge (Angleterre) pour participer au semestre *Principles of Stochastic Dynamics* (physique statistique hors-équilibre).
- 2008: invitations pour séminaire aux universités de Chemnitz et de Frankfurt (Allemagne).
- Avril 2010: invitation à parler à la conférence "workshop" du trimestre *Combinatorics and Control* (CSIC, Madrid).
- Novembre 2010: invitation à parler au séminaire de probabilités à l'Université d'Oxford par T. Lyons.
- 13–19 mars 2011: invitation à parler au workshop *Renormalization group* à l'Institut de recherches mathématiques d'Oberwolfach (organisateurs: M. Disertori, J. Feldman, M. Salmhofer).
- décembre 2011: invitation par H. Spohn à l'université de Munich (Allemagne).
- janvier 2012: invitation par M. Hairer à l'université de Warwick (Royaume-Uni).
- Printemps 2012: invitation au Hausdorff Research Institute (Bonn, Allemagne) pour le programme trimestriel *Mathematical challenges of materials science and condensed matter physics: from quantum mechanics through statistical mechanics to nonlinear pde* (organisateurs: S. Conti, R. James, S. Luckhaus, S. Müller, M. Salmhofer, B. Schlein).
- 5–11 août 2012: conférencier invité au *Congrès International de Physique Mathématique* (ICMP) se tenant à Aalborg (Danemark).

Invitations et séjours en France

- 2005- : Invitations régulières à l'université Lyon I (collaboration avec C. Roger, invitation au séminaire de physique mathématique).
- Exposés (entre autres): Centre de physique théorique (CPT) de Marseille-Luminy (2005); CEA Saclay, service de physique théorique (2007); laboratoire de probabilités de Paris VI (2007); Journées de Probabilité (Lille, septembre 2008; Poitiers, juin 2009; Dijon, juin 2010); séminaire d' équations différentielles et séminaire de probabilités (Toulouse, 2008); séminaire de probabilités et statistiques (Lille, 2009); atelier sur les symétries non relativistes (Tours, 2009); séminaire général (Mulhouse, 2009); conférence internationale sur la renormalisation (Lyon, juin 2010); séminaire de probabilités (Strasbourg, janvier 2011); séminaire de systèmes dynamiques et interactions et séminaire de probabilités et statistiques (Nice, janvier 2011); séminaire de physique mathématique (Lyon, février 2011); séminaire d'équations différentielles et séminaire de probabilités (Toulouse, 2011); séminaires d'équations aux dérivées partielles et de physique mathématique (Cergy, Bordeaux, 2011); conférence sur les *équations de Schwinger-Dyson* (GDR Renormalisation, Strasbourg, juin 2011); groupe de travail de modélisation stochastique (LPMA, Paris, février 2012); Séminaire lotharingien de combinatoire (Alsace, mars 2012).

2 Thèmes de recherche développés

A

Analyse harmonique sur les groupes de Lie semi-simples

Réf. A1–4

Mon travail de thèse et un certain nombre d'articles sur la période 1999-2002 portent sur l'étude de l'*analyse harmonique sur les groupes de Lie semi-simples*, notamment la dualité entre un espace symétrique pseudo-riemannien G/H (comme l'espace de de Sitter ou hyperboloïde à un feuillet) et son dual compact U/K (comme la sphère), ainsi que l'étude des fonctions et distributions sphériques sur un espace symétrique pseudo-riemannien à l'aide des *opérateurs de shift* introduits notamment par Cherednik et Opdam, avec des applications à des formules de type Plancherel ou Paley-Wiener.

Suite à l'impulsion donnée par le groupe de travail physique/mathématiques organisé à Nancy, je me suis alors graduellement réorienté vers d'autres thématiques, dans lesquelles la théorie des groupes a souvent sa part.

B

Géométrie des groupes de symétries dynamiques de dimension infinie et applications physiques

La période 2003–2007 a été essentiellement consacrée à l'étude d'une algèbre de Lie dite de *Schrödinger-Virasoro*, d'un point de vue *algébrique, géométrique et physique.* Il s'agit d'une *algèbre de Lie de dimension infinie*, $\mathfrak{sv}$, produit semi-direct de l'*algèbre de Virasoro* de charge centrale nulle $Vect(S^1)$ (autrement connue comme algèbre de champs de vecteurs sur le tore) – cf. monographie récente de L. Guieu et C. Roger [GuiRog] – par une algèbre de Lie nilpotente de rang 2 de dimension infinie. L'introduction de cette algèbre par M. Henkel

(du laboratoire de physique des matériaux de Nancy) en 1994 était motivée par la recherche d'une hypothétique *invariance d'échelle locale en physique statistique hors-équilibre*, calquée sur l'*invariance conforme* responsable de l'*intégrabilité* de quantité de modèles à l'équilibre au point critique, en dimension 2, dont les principaux paradigmes sont le modèle d'Ising et la percolation, rendus célèbres récemment par les travaux de Lawler-Schramm-Werner et S. Smirnov. Dans le cas d'un exposant dynamique $z = 2$ qui apparaît dans un certain nombre de modèles physiques, explorés notamment par M. Henkel et ses collaborateurs, la géométrie sous-jacente est la *géométrie non relativiste* ou *géométrie newtonienne*, qui se formalise à l'aide des variétés de Newton-Cartan (cf. travaux de C. Duval [Duv] et collaborateurs). L'algèbre $\mathfrak{sv}$ peut être introduite comme algèbre de symétries dans ce contexte.

1. Approche algébrique. Une analyse assez poussée des propriétés cohomologiques de l'algèbre $\mathfrak{sv}$ (déformations, extensions...), de ses extensions supersymétriques et de ses représentations a été menée en collaboration avec C. Roger, du département de mathématiques de l'université Lyon I, et M. Henkel (Réf. B2, 3, 5). On obtient des généralisations non triviales de résultats obtenus antérieurement pour l'algèbre de Virasoro et ses extensions semi-directes par modules de densité. L'algèbre de Schrödinger-Virasoro (ainsi que ses *supersymétrisations*, qui sont des extensions par produit semi-direct de superalgèbres de contact) apparaissent également comme quotients d'*algèbres de Poisson sur le tore* ou le *supertore*. Un article, consacré à l'étude de *représentations vertex*, prolonge des travaux classiques menés à partir des années 80 sur les représentations de l'algèbre de Lie de Virasoro dans le contexte de la *théorie conforme des champs* (cf. livre de P. Di Francesco et al. [DiF]).

2. Approche hamiltonienne. Il est bien connu (cf. livre classique d'Arnold-Khesin [ArnKhe] ou livre plus récent de Khesin-Wendt [KheWen]) que nombre d'équations aux dérivées partielles de la physique mathématique (KdV, Burgers, Euler...) s'obtiennent indifféremment comme géodésiques sur l'espace tangent à un *groupe de difféomorphismes de dimension infinie*, ou à partir d'un flot hamiltonien sur le *dual de l'algèbre de Lie*. Un des points de vue les plus prometteurs dans cette optique est celui des réalisations de $\mathfrak{sv}$ comme algèbre de symétries de familles d'équations physiques, en particulier d'*opérateurs de Schrödinger dépendant périodiquement du temps*. Les orbites de cette action sur le sous-espace des opérateurs de potentiel au plus quadratique en espace (du type oscillateurs harmoniques généralisés) sont de codimension finie; nous avons obtenu une classification à la Kirillov [Kir] de ces orbites à l'aide de formes normales (Réf. B7). La résolution explicite de ces opérateurs à l'aide des invariants d'Ermakov-Lewis introduits en physique quantique peut se réinterpréter dans ce cadre; la combinaison des outils algébriques, géométriques et analytiques permet en fin de compte de déterminer la monodromie de ces opérateurs . Dans un travail en collaboration avec C. Roger (Réf. B6), nous montrons – en utilisant la réalisation de $\mathfrak{sv}$ comme quotient d'une algèbre de Poisson comme ci-dessus – que l'action de $\mathfrak{sv}$ sur l'espace général des opérateurs de Schrödinger est hamiltonienne pour une certaine structure de Poisson obtenue comme projection d'une structure à la Kirillov-Kostant-Souriau.

Une monographie sur l'ensemble de ces résultats, en collaboration avec C. Roger, vient d'être publiée chez Springer (Réf. B8).

L'algèbre de Schrödinger-Virasoro peut être vue comme un premier essai de formalisation des symétries de systèmes variés, ayant pour point commun d'être l'objet d'une dynamique

apparentée de près ou de loin à une équation de Schrödinger ou parabolique (cf. livre récent de Henkel et Pleimling [HenPle]). La signature intuitivement la plus claire de la pertinence de cette algèbre est l'invariance de la dynamique sous le groupe de Schrödinger, ou sous le sous-groupe des transformations de vieillissement, dans lequel l'invariance par translation en temps a disparu. Malgré le livre (Réf. B8) récemment publié, nous considérons que le projet n'en est qu'à ses débuts. Pour le faire évoluer, il faut de toute évidence s'éloigner des équations aux dérivées partielles linéaires considérées jusqu'à présent, pour se rapprocher des problèmes physiques non linéaires qui l'ont motivé initialement. Parallèlement, l'étude proprement mathématique, à la façon d'Arnold et Khesin (mécanique hamiltonienne en dimension infinie associée à des groupes de difféomorphismes) de cette algèbre est loin d'être achevée; les étapes suivantes devraient galement faire apparaître des équations aux dérivées partielles non linéaires:

1. Dans les travaux de Lewis et Leach [LL], on trouve clairement la trace de nouvelles classes d'équations de Schrödinger non linéaires encore non identifiées, apparaissant lorsqu'on cherche des invariants de degré ≥ 3.
2. L'article (Réf. B6), portant sur la nature hamiltonienne de l'action par reparamétrisation sur les équations de Schrödinger, augure de l'existence de systèmes intégrables bi-hamiltoniens, sur lesquels nous n'avons pas eu le temps de nous pencher encore.
3. Reste la question lancinante de comprendre si des modèles dynamiques critiques satisfont une invariance sous un groupe de difféomorphismes de l'espace-temps de dimension infinie, relié de près ou de loin à l'algèbre de Schrödinger-Virasoro. Les réponses, s'il y en a, nécessiteront, on peut le parier, un long détour par les probabilités et la théorie des champs.

Bibliographie. [ArnKhe] V. Arnold, B. Khesin. *Topological methods in hydrodynamics.* [DiF] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal. *Conformal field theory*, Springer (1997). [Duv] C. Duval. *On Galilean isometries*, Class. Quantum Grav. **10** (1993). [GuiRog] L. Guieu, C. Roger. *L'algèbre et le groupe de Virasoro: aspects géométriques et algébriques*, CRM, Montreal (2007). [HenPle] M. Henkel, M. Pleimling. *Non-equilibrium phase transitions*, Springer (2010). [KheWen] B. Khesin, R. Wendt, *The geometry of infinite-dimensional groups* (2009). [Kir] A. A. Kirillov. *Infinite-dimensional Lie groups: their orbits, invariants and representations*, LNM **970** (1982). [LL] H. Lewis, P. Leach. *A direct approach to finding exact invariants for 1d time-dependent classical Hamiltonians*, J. Math. Phys. **23** (1982).

C
Géométrie locale des chemins rugueux: approches algébriques et physiques, applications au calcul stochastique

La résolution d'une équation différentielle classique $dy(t) = V(y(t))d\gamma(t)$ contrôlée par un chemin $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ – comme des équations d'évolution de manière plus générale – repose sur des méthodes de point fixe, les itérations faisant apparaître des *intégrales itérées du chemin* γ contre lui-même, qui s'interprètent géométriquement comme les *aires* et volumes engendrés. Lorsque γ est irrégulier, par exemple α-Hölder ($\alpha < 1$), la théorie des perturbations associée nécessite une *définition indépendante des premières intégrales itérées* jusqu'à l'ordre $N = \lfloor 1/\alpha \rfloor$.

Il est surprenant de voir combien ce problème apparemment naïf est en fait profond, et fait appel à des structures mathématiques et physiques extrêmement variées. Les travaux sur

les *chemins rugueux* dûs à T. Lyons, N. Victoir, P. Friz, M. Gubinelli et al. montrent que la donnée de telles intégrales itérées est équivalente à un relèvement des trajectoires comme sections Hölder d'un fibré principal sur $\mathbb{R}$ de fibre G_N, où G_N est un *groupe nilpotent libre*. De telles sections s'approchent à leur tour par des bouts de *géodésiques sous-riemanniennes* pour la *métrique de Carnot-Carathéodory* associée, au lieu des approximations de Taylor classiques. Malgré les applications de la théorie générale au calcul stochastique – les chemins irréguliers étant souvent d'origine aléatoire, comme par exemple les trajectoires browniennes (cf. livre récent de Friz-Victoir [FV]) –, l'approche purement géométrique est insuffisante pour deux raisons principales: (i) de tels relèvements sont a priori extrêmement *arbitraires*, sans que la géométrie *déterministe* permette a priori d'en choisir un meilleur ou plus *explicite* qu'un autre; (ii) les *géodésiques sous-riemanniennes* sont elles-mêmes des objets très mal connus, objet de recherches actuelles (cf. livre classique de Montgomery [Mon]).

Nous avons introduit à partir de 2007 de nouvelles approches algébriques et physiques permettant de construire des relèvements *explicites* provenant de motivations *physico-géométriques* encore largement à élucider. Un rôle fondamental, comme nous l'avons montré, est tenu par les *intégrales squelette* ou *intégrales ordonnées en Fourier*, obtenues par une analyse de Fourier, et motivées en fin de compte par les résultats de l'analyse en ondelettes ou *multi-échelles*. De manière générale, les probabilités fournissent les exemples et les applications les plus probants actuellement, et sous-tendent les démonstrations originelles; une partie des résultats obtenus (Réf. C1, 3, 4, 5, 7) concerne plus spécifiquement le *brownien fractionnaire*, famille de processus gaussiens dépendant de α comprenant le brownien usuel, et pour lesquels on ne savait pas construire les intégrales itérées en-dessous de la barrière $\alpha = 1/4$ ou $N = 4$. Il semble que les probabilités doivent jouer un rôle même dans l'étude des chemins déterministes.

1. *Algorithme de mise en ordre normal de Fourier.* Les intégrales squelette se codent comme des intégrales arborescentes d'un type particulier. Les relations classiques de compatibilité algébrique dites de *Chen* et de de *shuffle*, équivalentes à la notion géométrique de relèvement, s'interprètent de manière naturelle en termes du produit et du coproduit des *algèbres de Hopf* d'arbres de *Connes et Kreimer* (celle-ci rendue célèbre par les travaux algébriques sur la renormalisation des intégrales de Feynman [CK]) et de *shuffle*. Nous montrons en fait – à l'aide d'une construction combinatoire s'interprétant comme un isomorphisme explicite d'algèbres de Hopf (Réf. C8) – que tout chemin rugueux formel s'obtient par *l'algorithme de mise en ordre normal de Fourier* à partir de *données d'arbres* ou *données ordonnées en Fourier* arbitraires, indexées par des arbres à $\leq N$ sommets.

2. *Schémas de régularisation, schéma de renormalisation.* Les données d'arbres peuvent se construire par *régularisation* des intégrales squelette. La mise en ordre normal de Fourier s'avère ici être cruciale pour des raisons d'ordre *analytique*. Les schémas de régularisation, très arbitraires a priori (comme celui de *domaine de Fourier* développé initialement, cf. Réf. C4, 6), reposent sur des *méthodes multi-échelles*. La Réf. C9 introduit un nouveau schéma plus intrinsèque, provenant du schéma de renormalisation classique en théorie des champs, connu sous le nom de *formule des forêts de Bogolioubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann* (BPHZ), à l'aide d'une réécriture des intégrales itérées en termes de *diagrammes de Feynman*.

3. Les derniers travaux avec J. Magnen, du laboratoire de physique théorique de l'Ecole Polytechnique (Réf. C10, 11), vont beaucoup plus loin, puisqu'ils montrent que le brownien

fractionnaire et ses intégrales itérées définissent en vérité un nouveau *modèle non local de théorie des champs*, dont le flot du groupe de renormalisation est très particulier. Le modèle est bien défini à toutes les échelles, comme une analyse poussée suivant les lignes générales de la *théorie constructive des champs* permet de le montrer. L'article de revue (Réf. C12) résume les principes généraux de la *théorie constructive* (malheureusement peu connue en-dehors d'un petit cercle d'experts; cf. livre de V. Rivasseau [Riv]), et montre comment les appliquer aux chemins rugueux. La *compréhension géométrique et physique* de ces modèles non locaux, ainsi que l'*application systématique des outils de la théorie des champs au calcul stochastique et à la géométrie sous-riemannienne sous-jacente*, sont en cours (cf. projet I ci-dessous).

Bibliographie. [CK] A. Connes, D. Kreimer. *Hopf algebras, renormalization and non-commutative geometry*, Comm. Math. Phys. **199** (1998). [FV] P. Friz, N. Victoir. *Multidimensional dimensional processes seen as rough paths*, Cambridge Univ. Press (2010). [Mon] R. Montgomery. *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, AMS (2002). [Riv] V. Rivasseau. *From perturbative to constructive renormalization*, Princeton series in physics (1991).

3 Projets de recherche

I. Géométrie locale aléatoire des chemins

(ANR Exploration des chemins rugueux, et GDR Renormalisation)

Le projet – en collaboration avec Jacques Magnen, du laboratoire de physique théorique de l'Ecole Polytechnique –, à l'intersection entre *géométrie sous-riemannienne, calcul stochastique et théorie quantique des champs*, est dans la continuation directe des travaux précédents sur les chemins rugueux. Le fil conduit d'un problème probabiliste spécifique vers une approche générale inspirée par la physique et la combinatoire algébrique, à travers les dédales de la théorie des champs. Notre modèle initial s'obtient à partir de la mesure gaussienne $d\mu(\phi)$ du brownien fractionnaire ϕ en rajoutant un lagrangien d'interaction $\mathcal{L}$, quadratique en l'aire de Lévy (intégrale itérée d'ordre deux). A toute échelle de coupure ultra-violette ρ – coupant les fluctuations dont le logarithme de la fréquence est supérieur à ρ –, on associe la mesure de Gibbs $\mathbb{P}_{\lambda}^{\to\rho} := \frac{1}{Z^{\to\rho}} e^{-\lambda \int \mathcal{L}^{\to\rho}(\phi)} d\mu(\phi)$. On démontre à l'aide d'une *renormalisation constructive* (i.e. non perturbative, autrement dit mathématiquement rigoureuse) que la mesure limite $\mathbb{P}_{\lambda} := \lim_{\rho\to\infty} \mathbb{P}_{\lambda}^{\rho}$ définit un brownien fractionnaire (donc des trajectoires aléatoires *indistinguables* des trajectoires gaussiennes initiales) engendrant une aire signée (ou aire de Lévy) finie si l'indice α de régularité (ou de Hurst) du processus est dans l'intervalle $\alpha \in (1/8, 1/4)$. Des réinterprétations successives de ce modèle conduisent aux résultats suivants (à confirmer):

1. A l'aide du formalisme de *champ de réponse* de Martin-Siggia-Rose (jouant ici le rôle d'une *transformation de Girsanov*), le champ ϕ *quasi-Gaussien* modifié par l'interaction peut se réécrire comme solution d'une *équation différentielle* stochastique *singulière*, limite d'une suite d'équations différentielles stochastiques tronquées dans l'ultra-violet. De manière générale, ces équations différentielles sont en fait intégro-différentielles (elles font intervenir tout le passé de la trajectoire). L'énorme différence avec le modèle initial est

que ces équations différentielles sont *trajectorielles.* Elles existent donc aussi (au moins formellement) pour des chemins *déterministes* quelconques.

2. Lorsque $\alpha = 1/4$, un autre modèle conduit à une *véritable* équation *différentielle* et non intégro-différentielle (bien que toujours singulière), ne dépendant que de la valeur du chemin et de son aire à l'instant donné. Le terme de *drift* (*dérive*) fait intervenir un *bruit blanc indépendant de la trajectoire.* Ce bruit blanc conduit à faire "tourner" le chemin de manière aléatoire. En renormalisant directement l'équation différentielle par des méthodes constructives adaptées, on voit apparaître une *viscosité de l'aire* l'empêchant de diverger.

3. L'étude des singularités sur la diagonale de produits de données ordonnées en Fourier (correspondant à ce qu'on appelle *operator product expansions* ou *développements en produits opératoriels* en théorie quantique des champs) fait apparaître des coefficients qui semblent jouer le rôle de coefficients de Christoffel sur les groupes de Carnot-Carathéodory. De là on peut espérer tirer de nouvelles définitions de connexions sur ces variétés sous-riemanniennes, problème de géométrie bien connu, objet de nombreux travaux récents (cf. travaux d'A. Agrachev, L. Rifford, F. Baudoin, N. Juillet...) et sujet à des controverses.

4. Le modèle initial se généralise au brownien fractionnaire de régularité quelconque, en faisant intervenir dans l'interaction $\mathcal{L}$ les *données d'arbres* (morceaux en Fourier d'intégrales itérées arborescentes), définies antérieurement dans l'étude algébrique générale des chemins rugueux.

A côté de ces questions d'essence *géométrique*, subsistent des questions fondamentales spécifiquement *probabilistes.* Des travaux en cours semblent montrer: (1) qu'on peut démontrer un théorème d'existence *globale* des solutions d'équations différentielles stochastiques dirigées par un processus gaussien α-Hölder, sous des conditions de type Lipschitz; (2) que l'extension naturelle du calcul de Malliavin aux chemins rugueux est un *calcul de Malliavin ordonné en Fourier*, pour lequel les dérivées sont relatives non seulement au champ ϕ, mais à toutes les données d'arbres associées. Les opérateurs de dérivation se comprennent en termes de développements en produits opératoriels. Ce calcul de Malliavin devrait sans doute permettre de résoudre des équations différentielles stochastiques avec une condition d'hypoellipticité de type Hörmander ou "bracket-generating".

II. Explorations constructives: physique quantique

Le projet précédent m'a permis de m'approprier les techniques constructives en théorie des champs (cf. mon article de revue sur le sujet [C12]). C'est bien entendu l'occasion d'appliquer ces techniques dans des contextes tout à fait différents. Deux projets sont en cours, le premier avec Jacques Magnen, le deuxième avec Jacques Magnen et Fabien Vignes-Tourneret, de l'université de Lyon I.

1. *Etude constructive de la transition de phase supraconductrice.* Les travaux de Magnen-Rivasseau-Feldman-Trubowitz et al. [FMRT] sur le modèle BCS (supraconducteurs basse température) ont montré dans les années 90 comment comprendre l'apparition du gap d'énergie Δ caractéristique de la supraconductivité, en partant du modèle du jellium. Seules les premières étapes d'une renormalisation constructive de ce modèle ont été réalisées. Un développement en $1/N$, N=nombre de secteurs sur la sphère de Fermi (divergeant exponentiellement dans l'infra-rouge) devrait permettre de faire apparaître la transition de phase et de construire le modèle à toute température. Les idées sont présentes en germe dans ces

articles, mais n'ont jamais été poussées jusqu'au bout. Il s'agirait du premier modèle non intégrable avec transition de phase étudié intégralement par des méthodes rigoureuses de théorie des champs.

2. *Etude constructive de la théorie des particules élémentaires sur des espaces lorentziens.* La théorie constructive est depuis toujours écrite en *euclidien*, c'est-à-dire en *temps imaginaire*; les propagateurs sont alors singuliers dans la limite infra-rouge ou ultra-violette (pour les particules élémentaires), ou sur une surface ou sphère de Fermi (en physique du solide); le support de la singularité est donc "ponctuel" ou compact. Au contraire, en lorentzien, l'opérateur modèle (opérateur de Klein-Gordon ou opérateur des ondes) est hyperbolique, et les propagateurs sont singuliers sur les hyperboloïdes de masse, qui sont des hypersurfaces non compactes. L'analyse multi-échelles de ce genre d'opérateurs a été étudiée par Candès-Donoho-Demanet (cf. [CD]) à l'aide d'objets directionnels appelés *curvelets* généralisant les ondelettes; le découpage de l'espace des phases doit reposer ici sur des *Minkowski curvelets* définies sur l'espace-temps. Une étude d'un "toy model" bosonique (connu sous le nom de modèle ϕ^4 infra-rouge) en dimension 4 (cf. [FMRS] pour la version euclidienne) est en cours; elle est représentative des difficultés du problème (et relevante pour l'étude du fameux boson de Higgs recherché dans le nouvel accélérateur du CERN!). Elle repose en particulier sur la construction de ces *Minkowski curvelets*, intéressantes également pour la représentation des solutions d'équations d'onde générales (étude également en cours). La question de savoir si ce genre d'analyse multi-échelle est faisable sur des variétés lorentziennes plus générales est ouverte. On peut prédire que la réponse dépend de la structure géométrique à l'infini de la variété, et du comportement des solutions de l'équation de Klein-Gordon. Une interaction avec des spécialistes de la relativité générale serait très profitable.

Références. [CD] E. Candès, L. Demanet. *The curvelet representation of wave propagators is optimally sparse*, Comm. Pure Appl. Math. **58** (2004). [FMRS] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor. *Construction of infrared ϕ_4^4 by a phase space expansion*, Comm. Math. Phys. **109** (1987). [FMRT] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau, E. Trubowitz. *Constructive many-body theory*, Reviews in Math. Phys. **6** (1994).

III. Explorations probabilistes et constructives Physique statistique et EDP stochastiques

Le formalisme dit de réponse ou Martin-Siggia-Rose est un formalisme bien connu par les experts de la théorie des champs (perturbative), permettant de réécrire des équations aux dérivées partielles stochastiques dirigées par un bruit gaussien sous forme lagrangienne. Un des enjeux consiste à rendre ce formalisme rigoureux. Lorsque le processus de Markov sous-jacent n'est pas dans sa mesure d'équilibre à l'instant initial, une difficulté supplémentaire consiste à tenir compte de la condition initiale. On peut espérer pouvoir utiliser le formalisme de réponse au moins lorsque la condition initiale est suffisamment proche de la mesure d'équilibre, supposée connue. Un cas d'étude possible est celui de l'équation de croissance de Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) – illustrée ces dernières années par de nombreux travaux en dimension 1 de Spohn, Quastel, Corwin, Hairer... –, mais en trois dimensions d'espace ou plus, avec un cut-off ultra-violet (ou en d'autre termes, en utilisant une régularisation locale du bruit blanc). L'étude perturbative du groupe de renormalisation prédit que le terme non-linéaire est non pertinent dans la limite grande distance/grand

temps (avec scaling parabolique), et donc que la solution se comporte asymptotiquement comme une équation de la chaleur stochastique. Un autre problème bien connu est celui de l'équation d'Allen-Cahn, censée représenter le comportement d'un système de spins unidimensionnels trempés brutalement à basse température à partir d'une température supérieure à la température critique. Le bruit essentiel est alors dans les conditions initiales, qu'on peut supposer aléatoires, avec une corrélation à faible distance. Le régime de croissance des interfaces entre les domaines où le spin est positif et ceux où il est négatif a été étudié par de très nombreux auteurs, physiciens ou mathématiciens (De Masi, Presutti, Giacomin, Evans-Soner-Souganidis, Caputo-Martinelli-Simenhaus-Toninelli, Bray, Mazenko, Cugliandolo...), en lien avec le flot de courbure moyenne. La difficulté supplémentaire, de taille, est ici dans la condition initiale désordonnée, qu'on peut espérer traiter avec un mélange de techniques probabilistes et de théorie des champs. Les mêmes questions se posent pour des spins à valeurs complexes: on obtient alors une équation de Ginzburg-Landau dépendant du temps avec condition initiale désordonnée (cf. travaux de Bethuel-Orlandi-Smets). La question de l'établissement du régime initial de séparation de phases doit pouvoir se traiter par des techniques de limites hydrodynamiques (cf. travaux de Varadhan-Kipnis-Landim...), ce qui pourrait constituer un sujet de thèse pour un étudiant.

Signalons enfin que les outils d'analyse réelle (curvelets) présentés dans le paragraphe précédent, appliqués au modèle ϕ^4 *à température finie* - réécrit en termes d'une théorie lagrangienne grce au formalisme dit de Keldysh - pourrait permettre à terme d'établir la loi de Fourier de conduction de la chaleur, sujet de nombreuses investigations récentes (cf. articles de Bernardin-Olla, Eckmann, Hairer, Spohn, Bricmont-Kupiainen...).

Références. [BOS] F. Bethuel, G. Orlandi, D. Smets. *Convergence of the parabolic Ginzburg-Landau equation to motion by mean curvature*, Ann. Math. **163** (2006). [CMST] P. Caputo, F. Martinelli, F. Simenhaus, F. Toninelli. *"Zero" temperature stochastic 3d Ising model: a first step towards interface mean curvature motion*, arXiv:1007.3599.

4 Liste de publications

L'essentiel des publications se trouve sur arXiv et peut également être téléchargé à partir de ma page **http://www.iecn.u-nancy.fr/~unterber/articles.html**.

Les travaux concernant la **physique mathématique** (partie B) ont été réunis dans l'ouvrage suivant:

(pièce jointe) en collaboration avec C. Roger. *The Schrödinger-Virasoro algebra. Mathematical structure and dynamical Schrödinger symmetries.* Monographie parue chez Springer (Theoretical and mathematical physics, 2012).

Les travaux concernant les **chemins rugueux** (partie C) ont fait l'objet d'un article de synthèse paru dans la gazette de la SMF (janvier 2012), dont une copie est disponible sur ma page web.

Les techniques de **théorie constructive des champs** ont fait l'objet d'un article de revue:

(pièce jointe) *Mode d'emploi de la théorie constructive des champs bosoniques. Avec une application aux chemins rugueux.* A paraître à: Confluentes Mathematicae.

A. Analyse harmonique sur les groupes de Lie semi-simples

1. en collaboration avec N. B. Andersen. *Harmonic analysis on* $SU(n,n)/\ SL(n,\mathbb{C}) \times \mathbb{R}_+^*$, J. Lie Theory **10**, 311–322 (2000).
2. en collaboration avec F. Ricci. *Solvability of invariant sublaplacians on spheres and group contractions*, Rend. Mat. Acc. Lincei **9** (12), 27–42 (2001).
3. *Hypergeometric functions of second kind and spherical functions on an ordered symmetric space*, Journal Functional Analysis **188**, 137–155 (2002).
4. en collaboration avec N. B. Andersen. *An application of shift operators to ordered symmetric spaces*, Annales Institut Fourier **52** (1), 275–288 (2002).

B. Géométrie des groupes de symétries dynamiques et applications physiques

1. en collaboration avec M. Henkel. *Schrödinger invariance and space-time symmetries*, Nuclear Physics **B660**, 407–435 (2003).
2. **(pièce jointe)** en collaboration avec C. Roger. *The Schrödinger-Virasoro Lie group and algebra: representation theory and cohomological study*, Annales Henri Poincaré **7**, 1477–1529 (2006).
3. en collaboration avec M. Henkel. *Supersymmetric extensions of Schrödinger-invariance*, Nuclear Physics **B746**, 155–201 (2006).
4. en collaboration avec M. Henkel, R. Schott et S. Stoimenov. *On the dynamical symmetric algebra of ageing: Lie structure, representations and Appell systems*, Quantum Probab. White Noise Anal. **20**, 233–240 (2007).
5. *On vertex algebra representations of the Schrödinger-Virasoro algebra*, Nuclear Physics **B823** (3), 320–371 (2009).
6. **(pièce jointe)** en collaboration avec C. Roger. *A Hamiltonian action of the Schrödinger-Virasoro algebra on a space of periodic time-dependent Schrödinger operators in* $(1+1)$*-dimensions*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics **17** (3), 257–279 (2010).
7. **(pièce jointe)** *A classification of periodic time-dependent generalized harmonic oscillators using a Hamiltonian action of the Schrödinger-Virasoro group*, Confluentes Mathematicae **2** (2), 217–263 (2010).

C. Géométrie locale des chemins rugueux

1. *Stochastic calculus for fractional Brownian motion with Hurst exponent* $H > 1/4$ *: a rough path method by analytic extension*, Annals Probability **37** (2), 565–614 (2009).
2. en collaboration avec S. Tindel. *The rough path associated to the multidimensional analytic fractional Brownian motion with any Hurst parameter.* Collectanea Mathematica **62** (2), 197– (2011).
3. *A central limit theorem for the rescaled Lévy area of two-dimensional Brownian motion with Hurst index* $H < 1/4$. Preprint arXiv:0808.3458. Non publié.

4. *A stochastic calculus for multidimensional fractional Brownian motion with arbitrary Hurst index*, Stochastic Processes and Applications **120** (8), 1444-1472 (2010).

5. en collaboration avec A. Neuenkirch et S. Tindel. *Discretizing the fractional Lévy area*, Stochastic Processes and Applications **120** (2), 223–254 (2010).

6. *Hölder-continuous rough paths by Fourier normal ordering*, Communications in Mathematical Physics **298** (1), 1–36 (2010).

7. *Moment estimates for solutions of linear stochastic differential equations driven by analytic fractional Brownian motion*, Electronic Communications in Probability **15**, 411–417 (2010).

8. **(pièce jointe)** en collaboration avec Loïc Foissy (probabilités et combinatoire algébrique). *Ordered forests, permutations and iterated integrals*, International Mathematics Research Notices (2012).

9. *A renormalized rough path over fractional Brownian motion.* Preprint arXiv:1006.5604.

10. **(pièce jointe)** en collaboration avec J. Magnen. *From constructive field theory to fractional stochastic calculus. (I) An introduction: rough path theory and perturbative heuristics*, Annales Henri Poincaré **12**, 1199-1226 (2011).

11. en collaboration avec J. Magnen. *From constructive field theory to fractional stochastic calculus. (II) Constructive proof of convergence for the Lévy area of fractional Brownian motion with Hurst index* $\alpha \in (1/8, 1/4)$, Annales Henri Poincaré **13** (2), 209–270 (2011).

Articles sur les matrices de Toeplitz

1. en collaboration avec A. Böttcher et S. Grudsky. *Asymptotic pseudomodes of Toeplitz matrices*, Operators and Matrices **2**, 525–541 (2008).

2. en collaboration avec A. Böttcher, S. Grudsky et E. A. Maksimenko. *The first order asymptotics of the extreme eigenvectors of certain Hermitian Toeplitz matrices*, Integr. Equ. oper. theory **63**, 165–180 (2009).

Comptes-rendus de conférences et de l'Académie des Sciences
Divers

- *Prolongement analytique des séries de Fourier sur un groupe compact*, C. R. A. S. Paris **324** (I), 1089–1092 (1997).
- en collaboration avec M. Henkel, A. Picone et M. Pleimling. *Local scale invariance and its applications to strongly anisotropic critical phenomena*, Mathematical Physics Frontiers, Nova Science, New York (2004).
- *The Schrödinger-Virasoro Lie algebra: a mathematical structure between conformal field theory and non-equilibrium dynamics*, Journal of Physics, Conference Series **40**, 156 (2006).